QO'QON DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI ILMIY XABARLARI
(2025-yil 2-son)

PEDAGOGIKA

PEDAGOGY

O'QUVCHILARNI PARAMETR QATNASHGAN KVADRAT TENGLAMALARNI YECHISHGA O'RGATISH BO'YICHA BA'ZI BIR MULOHAZALAR

Axmadjon Axlimirzayev
Andijon davlat universiteti
Amaliy matematika va mexanika kafedrasi professori,
Mamadjanova Ma'muraxon Kadirjanovna
Andijon davlat universiteti Amaliy matematika
va mexanika kafedrasi dotsenti, PhD,
mamura.mamadjanova1981@mail.ru
Xurshidaxon Mirzaqulova*- Andijon davlat universiteti*
Amaliy matematika va mexanika kafedrasi 2-bosqich magistri

Annotasiya: Ushbu maqolada umumiy o'rta ta'lim maktablarida o'rganiladigan tenglamalar ichida eng muhimlaridan biri bo'lgan kvadrat tenglamalarni o'rganish metodikasini parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarni o'rganish orqali yanada takomillashtirish masalalari yoritilgan. Maqolada parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarning turlari va ularni yechish usullari yetarlicha misollar yordamida bayon qilingan.

Kalit so'zlar: Tenglama, kvadrat tenglama, parametr qatnashgan tenglama, diskriminant, keltirilgan kvadrat tenglama, tenglamaning ildizi.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ПО ОБУЧЕНИЮ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация: В данной статье рассмотрены вопросы дальнейшего совершенствования квадратного уравнения, которое является одним из важнейших уравнений, изучаемых в общеобразовательной школе, путем изучения квадратных уравнений с параметрами. В статье на достаточном количестве примеров показана виды квадратных уравнений, параметрами и методы их решения.

Ключевые слова: Уравнение, квадратное уравнение, уравнение с параметром, дискриминант, заданное квадратное уравнение, корень уравнения.

SOME CONSIDERATIONS ON TEACHING STUDENTS TO SOLVE QUADRATIC EQUATIONS WITH MULTIPLICATIONS

Abstract: This article describes the issues of further improvement of the method of learning quadratic equations, which is one of the most important equations studied in general secondary schools, by studying quadratic equations with parameters. The article describes the types of quadratic equations in which parameters are involved and the methods of solving them with the help of sufficient examples

Key words: Equation, quadratic equation, equation with parameter, discriminant, given quadratic equation, root of the equation.

Kirish. Ma’lumki, tenglama tushunchasi maktab matematika kursidagi muhim tushunchalardan biri hisoblanadi va u amaliyotning ko’plab masalalarini matematik modelidan iborat. Ko’plab fizik va mexanik jarayonlarni, hamda geometrik qonuniyatlarni o’rganish ko’pincha parametrga bog’liq masalalarni tuzish hamda ularni yechishga keltiriladi. O’quvchilarda bunday masalalarni tuzish va yechish malakalarini hosil qilish, ularda kelgusida oliy o’quv yurtlarida o’qitiladigan texnika fanlarini o’zlashtirishlarida muhim o’rin tutadi.

Adabiyotlar tahlili va metodologiya. Maktab matematika kursida o’rganiladigan tenglamalarning ko’pchiligi pirovard natijada kvadrat tenglamalarga keltirib yechiladi. Shuning uchun ham umumiy o’rta ta’lim maktablarida kvadrat tenglamalarni o’rganishga alohida e’tibor qaratilishi kerak bo’ladi. Ma’lumki, bugungi kunda kvadrat tenglamalar umumiy o’rta ta’lim maktablarining sakkizinchi sinfida o’qitiladi va unga 14 soat vaqt ajratilgan.

Muhokama va natijalar. So’nggi yillarda bir qancha maktablarda matematikani o’qitilish holatini o’rganish natijasida ularda kvadrat tenglamalarni o’rganish uchun ajratilgan vaqtda matematika o’quvchilari asosan kvadrat tenglama va uning xususiy hollarini, ulardagi a,b va c lar o’rnida qandaydir tayin qiymatlar bo’lgan hollarni o’rganish bilan cheklanayotganliklarini, ya’ni ular a,b, c lar yoki ulardan ba’zilari parameter bo’lgan hollarini o’rganishga unchalik ahamiyat berilmayotganligini ko’ramiz. Vaholanki, parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarni yechish jarayonida o’quvchilar izlanadi, mulohaza yuritadi, mushohada qiladi, yechimlarni tahlil qiladi va buning natijasida ularda ijodiy fikrlash qobiliyatlari rivojlanadi. Buning natijasida esa o’quvchilar kelgusida tenglamalarning boshqa sinflarini o’rganishda qiyinchiliklarga duch kelmaydilar. Shuning uchun ham umumiy o’rta ta’lim maktablarida parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarni tizimli o’rganish masalasi bugungi kundagi dolzarb masalalardan hisoblanadi[1,145-b.].

Ma’lumki, o’quvcvhilar $D = b^2 - 4ac$ ifodani $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ kvadrat tenglamaning diskriminanti deb atalishini, $D > 0$ bo’lganda tenglama $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ lardan iborat ikkita har xil ildizlarga ega bo’lishini, $D = 0$ bo’lsa, tenglama $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ lardan iborat ikkita o’zaro teng ildizlarga ega bo’lishini va $D < 0$ bo’lsa, tenglama ildizlarga ega emasligini biladilar. Bundan tashqari ular kvadrat tenglama ildizlari bilan koeffitsientlari orasidagi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ munosabatlarni ham biladilar.

O’quvchilarda $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning xususiy hollaridan hisoblangan, $x^2 + px + q = 0$ keltirilgan kvadrat tenglama, iikinchi hadining koeffitsienti juft bo’lgan $ax^2+2bx+c=0$, $ax^2+bx+c=0$ va $x^2+px+q=0$ ko’rinishdagi tenglamalarning ildizlarini topa olish malakalarini hosil qilish kerak.

Umumiy o’rta ta’lim maktablari darsliklarida keltirilmagan bir qator teoremalar borki, ular yordamida berilgan tenglamaning ildizlari haqida xulosa qilish mumkin bo’ladi[3.11-b.]. Quyida ularni keltiramiz:

1. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p>0, q>0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $x_1<x_2<0$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
2. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p<0, q>0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $0<x_1<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
3. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p>0, q<0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $x_1<0<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
4. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p<0, q<0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $x_1<0<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
5. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p>0, q=0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $x_1<x_2=0$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
6. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p<0, q=0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $0=x_1<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
7. Agar $x^2+px+q=0$ tenglamada $p=0, q<0$ bo’lsa, u holda uning ildizlari $x_1<0<x_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Ba’zan parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarda yuqorida keltirilgan savollardan tashqari quyidagi savollar ham qo’yilishi mumkin[4,44-b.].

1. Parametrlarning qanday qiymatlarida tenglama ikkita (bitta) ildizga ega bo’ladi.
2. Parametrlarning qanday qiymatlarida tenglama yechimga ega bo’lmaydi?
3. Parametrlarning qanday qiymatlarida tenglama ildizlari kvadrat(kub)lari yig’indisi eng katta (kichik) bo’ladi?
4. Parametrlarning qanday qiymatlarida tenglama ildizlaridan biri ikkinchisidan *k* marta katta(kichik) bo’ladi? va hokazo.

Parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni o’rganishni kvadrat tenglama, uning xususiy xollari va ularni yechish usullarini puxta o’rganilgandan so’ng yuqorida keltirilgan savollar ketma-ketligini nazarda tutgan holda tashkil qilish maqsadga muvofiqdir. Quyida parameter qatnashgan kvadrat tenglamalarga o’rganishga doir misollar keltiramiz:

1-masala. *a* parametrning qanday qiymatlarida $2x^2-(a^3+8a-1)x++a^2-4a=0$ tenglama ildizlari turli ishorali bo’ladi?

Yechish: Berilgan tenhlamani keltirilgan tenglama ko’rinishida yozamiz.

$$x^2-\frac{a^3+8a-1}{2}x+\frac{a^2-4a}{2}=0$$

Bu tenglama ildizlari qarama-qarshi ishorali bo’lishi uchun uning ildizlari ko’paytmasi $x_1 \cdot x_2 < 0$ bo’lishi kerak. Viyet teoremasiga asosan

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 - 4a}{2} < 0, \quad a^2 - 4a < 0, \qquad 0 < a < 4$$

Javob: $a \in (0; 4)$

2-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 - ax + 1 = 0$ tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo’lmaydi?

Yechish: Berilgan kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo’lmasligi uchun uning diskriminanti manfiy, ya’ni $D < 0$ bo’lishi kerak.

$$D = b^2 - 4ac = a^2 - 4, \quad a^2 - 4 < 0, \qquad a^2 < 4, \qquad -2 < a < 2.$$

Javob: $a \in (-2; 2)$

3-masala. k parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + 2(k-1)x + k + 5 = 0$ tenglama xech bo’lmaganda bitta musbat ildizga ega bo’ladi?

Yechish: Kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo’lishi uchun uning diskriminanti mahfiymas bo’lishi, ya’ni $D \geq 0$ bo’lishi kerak.

$$D = [2(k-1)]^2 - 4(k+5) = 4k^2 - 8k + 4 - 4k - 20 = 4k^2 - 12k - 16,$$

$4k^2 - 12k - 16 \geq 0, \;\; k^2 - 3k - 4 \geq 0\,; k \leq -1, \;\; k \geq 4$ yoki $k \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

k ning bu qiymatlarida tenglamaning har ikkala ildizi musbat, qarama-qarshi ishorali va har ikkala ildizi manfiy bo’lishi mumkin. Biz tenglamani har ikkala ildizi manfiy bo’ladigan k ning qiymatlarini topamiz. Viyet teoremasiga asosan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(k-1) < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = k + 5 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} k - 1 > 0 \\ k + 5 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} k > 1 \\ k > -5 \end{cases}; k > 1.$$

Agar biz $k \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$ ni e’tiborga olsak, berilgan tenglama $k \in (-\infty; -1]$ bo’lganda bitta musbat ildizga ega bo’ladi.

Javob: $k \in (-\infty; -1]$

4-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 5 = 0$ tenglama ildizlaridan biri ikkinchisidan ikki marta katta bo’ladi?

Yechish: Masalaning shartidan berilgan tenglama haqiqiy ildizlarga ega ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $D \geq 0$, ya’ni $(2a-1)^2 - 4(a^2+2) \geq 0$, $4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 8 \geq 0, -4a - 7 \geq 0$, $a \leq -\frac{7}{4}$ bo’lishi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan

$x_2 = 2x_1$ bo’lishi kerak. Viyet teoremasiga asosan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 + 2x_1 = 3x_1 = -2(a-1), \\ x_1 \cdot x_2 = 2{x_1}^2 = a^2 + 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_1 = -(2a-1), \\ 2{x_1}^2 = a^2 + 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2a-1}{3} \\ 2 \cdot \dfrac{4a^2 - 4a + 1}{9} = a^2 + 2 \end{cases};$$

$$2\cdot\frac{4a^2-4a+1}{9}=a^2+2,\ \ 8a^2-8a+2=9a^2+18,\qquad a^2+8a+16=0$$

$$(a+4)^2=0,\qquad a=-4.$$

a ning bu qiymati $a\le-\frac{7}{4}$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Javob: -4.

5-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $2x^2-\left(\sqrt{a^2-1}\right)x+a=0$ tenglama ikkita har xil musbat ildizlarga ega bo’ladi?

Yechish: Berilgan tenglama ikkita har xil musbat ildizlarga ega bo’lish sharti Vyet teoremasiga ko’ra quyidagi sistemaning yechimidan iborat.

$$\begin{cases} D=\frac{1}{4}(a^2-1)-4\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(a^2-8a-1)>0, \\ \frac{a}{2}>0, \\ a^2-1>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-8a-1>0 \\ a>0, \\ a>1 \end{cases};\ \ a>4+\sqrt{17}$$

Javob: $a>4+\sqrt{17}$.

6-masala. m parametrning qanday qiymatlarida $2x^2+mx+m^2-5=0$ tenglamaning har ikkala ildizi 1 dan kichik bo’ladi?

Yechish: Bu masalani yechishda quyidagi teoremadan foydalanish qulaydir:

Teorema. $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ funksiya biror x_0 sonidan kichik x_1 va x_2 ildizlarga ega bo’lishi uchun quyidagi shartlar bir vaqtda bajarilishi kerak:

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\ge0, \\ -\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2}<x_0, \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Bu teoremaga asosan quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} m^2-2\cdot4(m^2-5)\ge0, \\ -\frac{m}{4}<1, \\ 2\cdot1^2+m\cdot1+m^2-5>0. \end{cases}\quad \begin{cases} m^2-8m^2+40\ge0, \\ m>-4, \\ m^2+m-3>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7m^2\le40, \\ m>-4, \\ m^2+m-3>0. \end{cases}\quad \begin{cases} -\sqrt{\frac{40}{7}}\le m\le\sqrt{\frac{40}{7}}, \\ m>-4 \\ m<-\frac{1+\sqrt{13}}{2},\ \ m>\frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases}$$

Bu sistemadan $-\sqrt{\frac{40}{7}}\le m<-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ va $\frac{\sqrt{13}-1}{2}<m\le\sqrt{\frac{40}{7}}$ larni topamiz.

Javob: $[-\sqrt{\frac{40}{7}};\ -\frac{1+\sqrt{13}}{2})\ \cup\ (\frac{\sqrt{13}-1}{2};\ \sqrt{\frac{40}{7}}]$.

7-masala. k parametrning qanday qiymatlarida $x^2+2(k-3)x+9=0$ tenglamaning har ikkala ildizi (-6;1) oraliqda yotadi.

Yechish. Bu masalani yechishda quyidagi teoremadan foydalanish qulaydir:

Teorema. $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ funksiya p va q sonlari orasida yotuvchi ikkita x_1 va x_2 ildizlarga quyida shartlar bajarilganda va shu holdagina ega bo'ladi:

$$\begin{cases} D=\ b^2-4ac\geq 0, \\ f(p)>0, \\ f(q)>0, \\ p<-\dfrac{b}{2a}<q \end{cases}$$

Bu teoremaga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} [2(k-3)]^2-4\cdot 9>0, \\ (-6)^2+2(k-3)\cdot(-6)+9>0, \\ 1^2+2(k-3)\cdot 1+9>0, \\ -6<-(k-3)<1 \end{cases};\quad \begin{cases} 4k^2-24k+36-36>0, \\ 36-12k+36+9>0, \\ 1+2k-6+9>0 \\ -9<-k<-2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(k-6)>0, \\ 12k<81, \\ 2k>-4, \\ 2<k<9. \end{cases}\qquad \begin{cases} k<0, k>6, \\ k<\dfrac{27}{4}\ ,6<k<6{,}75 \\ k>-2, \\ 2<k<9. \end{cases}$$

Javob: $k\in(6;6{,}75)$

8-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $2x^2-(a+1)x+a+3=0$ tenglama ildizlari ayirmasining kvadrati 1 ga teng bo'ladi?

Yechish: Aytaylik x_1 va x_2 lar berilgan tenglamaning ildizlari bo'lsin. U holda masalaning shartiga asosan $(x_1-x_2)^2=1$ bo'lishi kerak. Viyet teoremasiga asosan

$x_1+x_2=\frac{a+1}{2}$ va $x_1\cdot x_2=\frac{a+3}{2}$ larni yozamiz. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2$ tenglikdan foydalanamiz.

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=(\frac{a+1}{2})^2-4\cdot\frac{a+3}{2}==\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{8(a+3)}{4}$$
$$=\frac{a^2+2a+1-8a-24}{4}==\frac{a^2-6a-23}{4}$$

Masalaning shartiga asosan,

$\frac{a^2-6a-23}{4}=1,\ a^2-6a-23=4,\ a^2-6a-27=0, a_1=-3, a_2=9.$

Tekshirib ko'rib, bulardan $a=-3$ berilgan masalaning shartini qanoatlantirishini ko'ramiz.

Javob: -3.

9-masala. a parametrning qanday qiymatlarida $x^2 - 2ax + 8a - 15 = 0$ tenglama ildizlari$(1; +\infty)$ oraliqda yotadi?

Yechish: $f(x) = x^2 - 2ax + 8a$-15 funksiyani qaraymiz. Kvadrat funksiyaning hossasiga asosan $x^2 - 2ax + 8a$-15=0 tenglama $(1; +\infty)$ oraliqda yotuvchi ildizlarga quyidagi ikkita holda ega bo'lishi mumkin:

1) Tenglamaning ikkita ildizi birdan turli tomonlarda yotadi;
2) Har ikkala ildiz birdan o'ng tomonda yotishi va ustma-ust tushishi.

Birinchi hol: $D > 0$ va $f(1) < 0$ shartlarda bajariladi, ya'ni,

$$\begin{cases} a^2 - 8a + 15 > 0, \\ 1 + 6a - 15 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-5) > 0, \\ a < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{7}{3}\right) \cup (5; +\infty);$$

Ikkinchi hol: $D \geq 0, f(1) \geq 0$ shartlarda bajariladi, ya'ni

$$\begin{cases} (a-3)(a-5) \geq 0, \\ 1 + 6a - 15 \geq 0, \\ a > 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)(a-5) \\ a \geq \dfrac{7}{3}, \\ a > 1. \end{cases} \quad a \in \left[\frac{7}{3}; 3\right] \cup [5; +\infty)$$

Javob:$a \in (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$

Xulosa. Bu yerda keltirilgan parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni yechish jarayonida o'quvchilarning fikrlash qobiliyatlari yanada rivojlanadi va parametr qatnashgan boshqa tenglamalarni o'rganishda asos bo'lib xizmat qiladi. Shuning uchun dars jarayonida va darsdan tashqari vaqtlarda o'quvchilar bilan parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni yechishga ko'proq ahamiyat qaratish kerak bo'ladi. Bu esa matematik ta'limni samarali bo'lishini ta'minlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Matematikadan qomusiy lug'at.(A.A'zamov tahriri ostida). T.: Qomuslar bosh tahririyati, 1991, 480b.
2. Barakayev M, Matematika o'qitish metodikasi (II-qism). T.: "GRANT KONDOR PRINT", 2024-282b.
3. П.Т.Дыбов, В.А.Осколков. Задачи по математике. М. Оникс, 2006-464с.
4. A.Axlimirzayev, T.S. Nishonov, E.M.Raximberdiyev, D.M. Raximberdiyeva. Parametrli masalalar yechish metodlari. T. "Metodist nashriyoti"., 2024-184b.